本章我们推导出流体运动的微分方程,即质量守恒(连续性方程)和牛顿第二定律(纳维-斯托克斯方程).这些方程适用于流场中的每一个点,从而使我们能够求解流域中各处流动的所有细节.不幸的是,流体力学中遇到的大多数微分方程都很难求解,而且常常需要计算机的帮助.此外,这些方程必须在必要时与其他方程组合,例如状态方程和能量和/或物质传输方程.我们提供了求解这组流体运动微分方程的分步程序,并获得了几个简单示例的解析解.我们还介绍了流函数的概念;恒流函数曲线在二维流场中表现为流线.

**目标**

读完本章后,您应该能够:

* 理解质量守恒微分方程和微分线性动量方程的推导和应用;
* 计算流函数和压力场,并绘制流线图已知速度场;
* 获得简单流场运动方程的解析解.

**9-1 介绍** 2021年7月31日14点12分

在第5章中,我们导出了质量和能量守恒定律的控制体积版本,在第6章中,我们对动量做了同样的处理.当我们对流动的整体特征感兴趣时,控制体积技术很有用,例如进出控制体积的质量流量或施加到物体上的净力.图9-1a中描绘了一个示例,用于说明风在卫星天线周围流动的情况.如图所示,在卫星天线附近取矩形控制体积.如果我们知道沿整个控制面的空气速度,我们就可以计算支架上的净反作用力,而无需了解有关卫星天线几何形状的任何细节.在控制体积分析中,控制体积的内部实际上被视为一个“黑匣子”——我们无法获得关于控制体积内各点的流速或压力等流动特性的详细知识.

另一方面,**微分分析**涉及将流体运动的微分方程应用于流场中称为流域的区域上的任何点.您可以将微分技术视为在整个流场中对数百万个首尾相连且彼此叠加的微小控制体积进行分析.随着微小控制体的数量趋于无穷大,并且每个控制体的大小缩小到一个点,守恒方程简化为一组在流中任何一点都有效的偏微分方程.求解时,这些微分方程会生成有关整个流域中每个点的速度,密度,压力等的详细信息.例如,在图,9-1b中,卫星天线周围气流的微分分析产生了流线形状,卫星周围详细的压力分布等.从这些细节中,我们可以整合以找到流动的粗略特征,例如净力在卫星天线上.

在如图9-1所示的流体流动问题中,其中空气密度和温度变化无关紧要,求解两个微分运动方程——质量守恒和牛顿第二定律(线性动量方程)就足够了.对于三维不可压缩流动,有四个未知数(速度分量和压力P)和四个方程(一个来自质量守恒,这是一个标量方程,三个来自牛顿第二定律,其中是一个向量方程).正如我们将看到的,方程是**耦合的**,这意味着一些变量出现在所有四个方程中;因此,必须同时求解所有四个未知数的微分方程组.此外,必须在流域的所有**边界**(包括入口,出口和壁)指定变量的边界条件.最后,如果流动不稳定,我们必须随着流场的变化及时推进我们的解决方案.您可以看到流体流动的微分分析如何变得非常复杂和困难.正如第15章所讨论的,计算机在这里有很大的帮助.然而,我们可以通过分析来做很多事情,我们从推导出质量守恒的微分方程开始.

**9-2 质量守恒——连续性方程** 2021年7月31日14点21分

通过应用雷诺输运定理(第4章),我们有以下用于控制体积的质量守恒的一般表达式:

回想一下公式9-1对固定和移动控制体积都有效,前提是速度矢量是绝对速度(如固定观察者所见).当有明确定义的入口和出口时,公式9-1重写为

换句话说,控制体积内的净质量变化率等于质量流入控制体积的速率减去质量流出控制体积的速率.公式9-2适用于任何控制体积,无论其大小如何.为了生成质量守恒的微分方程,我们想象控制体积缩小到无穷小,尺寸为和(图9-2).在极限情况下,整个控制体积缩小到流中的一个点.

**使用散度定理推导**

推导出质量守恒的微分形式的最快和最直接的方法是将散度定理应用于方程9-1.**散度定理**也称为**高斯定理**,以德国数学家约翰·卡尔·弗里德里希·高斯(Johann Carl Friedrich Gauss，1777-1855)的名字命名.散度定理允许我们将向量散度的体积积分转换为定义体积的表面上的面积积分.对于任意向量,的**散度**定义为,散度定理写为

面积积分上的圆圈用于强调积分必须围绕围绕体积的整个包围面积A计算.请注意,公式9-1的控制面是一个封闭区域,尽管我们并不总是将圆添加到积分符号中.公式9-3适用于任何体积,因此我们选择公式9-1的控制体积.我们还设,因为可以是任何向量.将方程9-3代入方程9-1将面积积分转换为体积积分,

我们现在将两个体积积分合二为一,

最后,我们认为公式9-4必须适用于任何控制体积,无论其大小或形状如何.只有当被积函数(方括号内的项)完全为零时,这才是可能的.因此,我们有一个质量守恒的一般微分方程,更广为人知的是**连续性方程**:

方程9-5是连续性方程的可压缩形式,因为我们没有假设不可压缩的流动.它在流域中的任何一点都有效.

**使用无穷小控制体积推导**

我们以不同的方式推导出连续性方程,从我们应用质量守恒的控制体积开始.考虑与笛卡尔坐标中的轴对齐的无穷小盒形控制体积(图9-3).盒子的尺寸是和,盒子的中心显示在离原点的任意点P处(盒子可以位于流场中的任何位置).在盒子的中心,我们将密度定义为𝜌,将速度分量定义为和,如图所示.在远离盒子中心的位置,我们使用围绕盒子中心(点P)的泰勒级数展开.[级数展开式的名字是为了纪念它的创造者,英国数学家 Brook Taylor (1685-1731).] 例如,长方体最右侧面的中心位于距离中心点的位置.x方向的框;此时的值是

然而,随着表示控制体积的框缩小到一个点,二阶和更高的项变得可以忽略不计.例如,假设,其中L是流域的某个特征长度尺度,则,比dx/L小一千倍.事实上,越小,二阶项可以忽略的假设就越好.将这个截断的泰勒级数展开式应用到密度乘以盒子六个面中每一个面的中心点的法向速度分量,我们有

流入或流出其中一个面的质量流量等于密度乘以面中心点的法向速度分量乘以面的表面积.换句话说,在每个面上,其中是通过面的法向速度的大小,A是面的表面积(图9-4).图 9-5说明了通过我们无穷小的控制体积每个面的质量流量.我们也可以为剩余的(非法向)速度分量在每个面的中心构造截断的泰勒级数展开式,但这是不必要的,因为这些分量与所考虑的面相切.例如,右面中心的𝜌𝜐的值可以通过类似的扩展来估计,但由于𝜐与盒子的右面相切,因此它对流入或流出该面的质量流量没有贡献.

随着控制体积缩小到一个点,公式9-2左侧的体积积分值变为

因为盒子的体积是.我们现在将图9-5的近似值应用到公式9-2的右侧.我们将通过面进出控制体积的所有质量流量相加.**左侧**,**底部**和**背面**有助于质量流入,公式9-2右侧的第一项变为

类似地,**右侧**,**顶部**和**正面**对质量流出有贡献,公式9-2右侧的第二项变为

我们将方程9-7和这两个质量流量方程代入方程9-2.许多项相互抵消;在组合和简化剩余项之后,我们剩下

盒子的体积出现在每一项中并且可以被消除.重新排列后,我们最终得到以下用于笛卡尔坐标中质量守恒的微分方程:

方程9-8是笛卡尔坐标系中连续性方程的可压缩形式.通过识别发散操作(图9-6)以更紧凑的形式编写它,产生与公式9-5相同的等式.

**连续性方程的另一种形式**

我们通过对散度项使用乘积规则来扩展方程9-5,

识别方程9-9中的物质导数(见第4章),并除以𝜌,我们以另一种形式写出可压缩连续性方程,

方程9-10表明,当我们跟随流体元素穿过流场(我们称其为物质元素)时,其密度会随着的变化而变化(图9-9).另一方面,如果物质元素的密度变化与元素移动时的密度本身的大小相比小到可以忽略不计,那么方程9-10中的两项都小到可以忽略不计;和,并且流动近似为**不可压缩**.

**圆柱坐标中的连续性方程**

流体力学中的许多问题在**圆柱坐标**()(通常称为**圆柱极坐标**)中更方便地解决,而不是在笛卡尔坐标中.为简单起见,我们首先在二维中引入圆柱坐标(图9-10a).按照惯例,是从原点到某个点(P)的径向距离,而𝜃是从x轴测量的角度(𝜃始终定义为逆时针方向的数学正数).速度分量和以及单位向量和也显示在图9-10a中.在三个维度中,想象一下将图9-10a中的所有内容沿轴(垂直于平面)从页面中滑出一定距离z.我们试图在图9-10b中绘制它.在三维度上,我们有第三个速度分量和第三个单位向量,也在图9-10b中画出.

以下坐标变换从图9-10中获得:

坐标z在圆柱坐标和笛卡尔坐标中是相同的.

要获得圆柱坐标中连续性方程的表达式,我们有两种选择.首先,我们可以直接使用公式9-5,因为它是在不考虑我们选择的坐标系的情况下得出的.我们只是在矢量微积分书中查找圆柱坐标中散度算子的表达式(例如,Spiegel,1968;另请参见图9-6).其次,我们可以在圆柱坐标系中绘制一个三维无穷小流体元素,并分析进出元素的质量流量,类似于我们之前在笛卡尔坐标中所做的.无论哪种方式,我们最终

第二种方法的详细信息可以在Fox和McDonald(1998)中找到.

**连续性方程的特例**

我们现在看连续性方程的两个特殊情况或简化.特别地,我们首先考虑稳定的可压缩流动,然后考虑不可压缩流动.

**特例1: 稳定可压缩流**

如果流动是可压缩但稳定的,则任何变量的都等于0.因此,等式9-5简化为

在笛卡尔坐标系中,方程9-13简化为,

在圆柱坐标系中,方程9-13简化为,

**特例2: 不可压缩流**

如果流动近似为不可压缩,则密度不是时间或空间的函数.因此,方程9-5中的非定常项消失了,并且𝜌可以在散度算子之外进行.因此,公式9-5简化为

如果我们从公式9-10开始,并认识到对于不可压缩的流动,密度不会随着流体粒子发生明显变化,如前面所指出的那样,得到相同的结果.因此𝜌的物质导数近似为零,方程9-10立即简化为方程 9-16.

您可能已经注意到,公式9-16中没有保留时间导数.我们由此得出结论,即使流动不稳定,公式9-16也适用于任何时刻.从物理上讲,这意味着当不可压缩流场的一部分中的速度场发生变化时,流场的整个其余部分会立即适应变化,从而始终满足公式9-16.对于可压缩流,情况并非如此.事实上,在来自扰动的声波到达该距离之前,一定距离的流体粒子甚至不会感觉到流动的一部分中的扰动.非常响亮的噪音,例如枪声或爆炸声,会产生实际上比声速传播得更快的冲击波.(爆炸产生的冲击波如图9-11所示.)冲击波和其他可压缩流的表现在第12章中讨论.在笛卡尔坐标系中,方程9-16是

方程9-17是您可能最常遇到的连续性方程的形式.它适用于稳态或非稳态,不可压缩,三维流动,你最好记住它.

在圆柱坐标系中,方程9-16是

**9-3 流函数** 2021年7月31日16点02分

**笛卡尔坐标中的流函数**

考虑平面中不可压缩的二维流的简单情况.笛卡尔坐标系中的连续性方程(方程9-17)简化为

巧妙的变量转换使我们能够用一个因变量()而不是两个因变量(u和𝜐)来重写等式 9-19.我们将**流函数**定义为(图9-17)

流函数和相应的速度势函数(第10 章)首先由意大利数学家约瑟夫·路易斯·拉格朗日(Joseph Louis Lagrange,1736-1813年)引入.将方程9-20代入方程9-19得到

对于任何平滑函数都同样满足,因为微分的顺序是无关紧要的.

你可能会问为什么我们选择在𝜐上加上负号而不是u.(我们可以定义符号相反的流函数,并且连续性仍然会得到相同的满足.)答案是尽管符号是任意的,但方程9-20的定义导致从左到右在y-方向上增加,这通常是首选.大多数流体力学书籍都以这种方式定义,尽管有时是用相反的符号定义的(例如,在一些英国教科书和室内空气质量领域，Heinsohn和Cimbala，2003年).

通过这次变换,我们得到了什么?首先.如前所述.单个变量()替换两个变量(和)——一 旦已知𝜓,我们就可以通过公式9-20生成u和𝜐,并且我们保证解满足连续性,公式9-19.其次,事实证明流函数具有有用的物理意义(图9-18).即,

常数𝜓的曲线是流的**流线**.

这很容易通过考虑平面中的流线来证明,如图9-19所示.回忆第4章,沿着这样一条流线,

我们已经应用了公式9-20,即𝜓的定义.因此,

但是对于两个变量和的任何平滑函数𝜓,我们通过数学链式法则知道𝜓从点的总变化到另一点的无穷小距离是

通过比较等式9-21和等式9-22,我们看到沿着一条流线;因此我们证明了流线型.

关于流函数还有另一个物理上重要的事实:

从一条流线到另一条流线的𝜓值的差异等于两条流线之间每单位宽度的体积流量.

该语句如图9-22所示.考虑两条流线和,并想象在平面中以单位宽度进入页面的二维流(在方向上为1m).根据定义,没有流可以穿过流线.因此,恰好占据这两条流线之间空间的流体仍被限制在相同的两条流线之间.因此,通过流线之间任何横截面的质量流量在任何时刻都是相同的.横截面切片可以是任何形状,只要它从流线1开始,到流线2结束.例如,在图9-22中,切片A是从一个流线到另一流线的平滑弧,而切片B是波浪形.对于平面中稳定的,不可压缩的二维流动,体积流量为.因此,两条流线之间(每单位宽度)必须是一个常数.如果两条流线分开,就像它们从横截面切片A到横截面切片B所做的那样,两条流线之间的平均速度相应降低,因此体积流量保持不变().在示例9-8的图9-20中,绘制了流线和之间流场中四个位置的速度矢量.您可以清楚地看到,随着流线彼此发散,速度矢量的幅度会衰减.同样,当流线收敛时,它们之间的平均速度必须增加.

我们通过考虑由图9-22的两条流线以及横截面切片A和横截面切片B(图9-23)界定的控制体积,以数学方式证明给定的陈述.图9-23a显示了沿切片B的无穷小长度及其单位法向量.为清楚起见,图9-23b中绘制了该区域的放大视图.如图所示,的两个分量是和;因此单位法向量是

通过控制面段ds的单位宽度体积流量为

其中乘以,其中1表示进入页面的单位宽度,与单位系统无关.当我们展开公式9-23的点积并应用公式9-20时,我们得到

我们通过将公式9-24从流线1积分到流线2来找到通过横截面切片B的总体积流量,

因此,通过切片B的每单位宽度的体积流量等于限制切片B的两个流函数值之间的差值.现在考虑图9-23a的整个控制体积.因为我们知道没有流穿过流线,质量守恒要求通过切片A进入控制体积的体积流量与通过切片B从控制体积流出的体积流量相同.最后,因为我们可以选择两条流线之间任何形状或位置的横截面切片,该陈述得到证实.

在处理流函数时,流的方向是通过我们所谓的“左侧约定”获得的.也就是说,如果您在平面(图9-24)处向下看z轴并沿流动方向移动,则流函数会向您的左侧增加.

的值在平面中向流动方向的左侧增加.

例如,在图9-24中,流函数向流动方向的左侧增加,无论流动曲折多少.还要注意,当流线相距很远时(图9-24的右下角),该附近的速度(流体速度)的大小相对于流线靠近的位置(中间区域)的速度较小图9-24).这很容易用质量守恒来解释.随着流线会聚,它们之间的横截面积减小,并且速度必须增加以保持流线之间的流速.

**圆柱坐标系中的流函数**

对于平面上的二维流，我们也可以定义柱坐标下的流函数,这对于很多问题来说更方便.请注意,二维是指只有两个相关的独立空间坐标——不依赖于第三个分量.有两种可能.第一个是**平面流**,就像方程9-19和9-20一样,使用和而不是和(见图9-10a).在这种情况下,不依赖于坐标z.对于r𝜃平面中的二维平面流,我们简化了不可压缩的连续性方程,即方程9-18,

我们定义流函数如下:

我们再次注意到一些教科书中的符号是颠倒的.您可以将等式9-27代入等式9-26以说服自己,等式9-26对于任何平滑函数都同样满足,因为微分的顺序是与平滑函数无关.

柱坐标下的第二种二维流是**轴对称[axisymmetric]流**,其中和是相关的空间变量,和是非零速度分量,并且不依赖于𝜃(图9-27).轴对称流的示例包括围绕球体,子弹以及许多物体(如鱼雷和导弹)的前部的流动,如果不是它们的鳍,这些物体在任何地方都是轴对称的.对于不可压缩的轴对称流动,连续性方程为

流函数被定义为完全满足方程9-28,当然前提是𝜓是r和z的平滑函数,

我们还注意到,还有另一种描述轴对称流的方法,即使用笛卡尔坐标和,但强制坐标x为对称轴.这会导致混淆,因为必须相应地修改运动方程以考虑轴对称.然而,这通常是CFD代码中使用的方法.优点是在平面上设置网格后,同一个网格既可以用于平面流(在平面中没有z相关性的流)也可以用于轴对称流(在平面中与绕x轴旋转对称).我们不讨论轴对称流的这种替代描述的方程.

**可压缩流函数\***

我们将流函数概念扩展到xy平面中稳定的,可压缩的二维流.对于稳定的二维流,笛卡尔坐标系中的可压缩连续性方程(方程9-14)简化为以下内容:

我们引入了一个**可压缩的流函数**,我们表示为,

根据定义,方程9-31的正好满足方程9-30,前提是是和的平滑函数.可压缩流函数的许多特征与前面讨论的不可压缩流函数的特征相同.例如,常数的曲线仍然是流线.然而,从一个流线到另一个流线的区别在于每单位宽度的质量流量,而不是每单位宽度的体积流量.尽管不像其不可压缩的对应物那样受欢迎,但可压缩流函数在一些商业CFD代码中得到了使用.

**9-4 微分线性动量方程——柯西方程** 2021年7月31日17点34分

通过应用雷诺输运定理(第4章),我们得到了应用于控制体积的线性动量方程的一般表达式,

其中是第6章中介绍的**应力张量**.在无穷小矩形控制体积的正面上的分量如图9-29所示.公式9-32适用于固定和移动控制体积,前提是是绝对速度(从固定观察者看来).对于具有明确定义的入口和出口的流的特殊情况,公式9-32简化如下:

其中后两项中的为入口或出口的平均速度,𝛽为动量通量修正因子(第6章).也就是说,作用在控制体积上的总力等于动量的速率控制体积内的变化加上动量流出控制体积的速率减去动量流入控制体积的速率.公式9-33适用于任何控制体积,无论其大小如何.为了生成微分线性动量方程,我们想象控制体积缩小到无穷小.在极限情况下,整个控制体积缩小到流中的一个点(图9-2).我们在这里采用与质量守恒相同的方法;也就是说,我们展示了不止一种推导线性动量方程微分形式的方法.

**使用散度定理推导**

推导出动量方程的微分形式的最直接(也是最优雅)的方法是应用方程9-3的散度定理.散度定理的更一般形式不仅适用于向量,也适用于其他量,例如张量,如图9-30所示.具体来说,如果我们将图9-30的扩展散度定理中的替换为二阶张量,则方程9-32中的最后一项变为

其中是向量乘积,称为速度向量与其自身的外积.(两个向量的外积与内积或点积不同,也不与两个向量的叉积相同.)同样.如果我们将图9-30中的替换为应力张量,公式9-32左侧的第二项变为

因此,通过应用方程9-34和9-35,方程 9-32 的两个面积积分变成体积积分.我们组合并重新排列这些项,并将等式9-32重写为

最后,我们认为公式9-36必须适用于任何控制体积,无论其大小或形状如何.只有当被积函数(用方括号括起来)完全为零时,这才是可能的.因此,我们有一个线性动量的一般微分方程,称为**柯西方程**,

公式9-37以法国工程师和数学家奥古斯丁·路易斯·德·柯西(Augustin Louis de Cauchy，1789-1857)的名字命名.它对可压缩和不可压缩流都有效,因为我们没有对不可压缩性做出任何假设.它在流域中的任何一点都有效(图9-31).请注意,方程9-37是一个向量方程,因此表示三个标量方程,三维问题中的每个坐标轴一个.

**使用无穷小控制体积推导**

我们以第二种方式推导出柯西方程,使用无穷小的控制体积,我们在其上应用线性动量方程(方程9-33).我们考虑用于推导连续性方程的相同盒形控制体积(图9-3).在盒子的中心,如前所述,我们将密度定义为𝜌,将速度分量定义为和.我们还在盒子的中心将应力张量定义为.为简单起见,我们考虑公式9-33的分量,通过设置等于其x分量和等于其分量获得.这不仅简化了图表,而且使我们能够使用标量方程,即,

随着控制体积缩小到一个点,公式9-38右侧的第一项变为

因为微分元件的体积是.我们在远离控制体积中心的位置应用一阶截断泰勒级数展开来近似x方向上动量的流入和流出.图9-32显示了在无穷小控制体积的六个面中的每一个面的中心点处的这些动量通量.只需要考虑每个面的法向速度分量,因为切向速度分量不会影响流出(或流入)面的质量流,因此也没有流过面的动量.

通过对所有流出求和并减去图9-32中显示的所有流入,我们获得了公式9-38的最后两项的近似值,

其中在所有面上都设置为1,与我们的一阶近似一致.

接下来,我们将在x方向上作用在我们无穷小的控制体积上的所有力求和.正如在第6章中所做的那样,我们需要同时考虑体力和表面力.重力(重量)是我们唯一考虑的体力.对于坐标系可能不与轴(或与此相关的任何坐标轴)对齐的一般情况,如图9-33所示,重力矢量写为

因此,在x方向上,控制体积上的物体力为

接下来我们考虑方向的净表面力.回想一下,应力张量具有单位面积力的维度.因此,要获得一个力,我们必须将每个应力分量乘以它所作用的面的表面积.我们只需要考虑那些指向x-(或 -x-)方向的组件.(应力张量的其他分量,尽管它们可能不为零,但对x方向的净力没有贡献.)使用截断的泰勒级数展开,我们勾勒出对x方向的净x分量有贡献的所有表面力作用在我们的差分流体元件上的表面力(图9-34).

将图9-34中所示的所有表面力相加,我们得到了作用在x方向上的微分流体元素上的净表面力的近似值,

我们现在将方程9-39到9-42代入方程9-38,注意到流体微分元素的体积出现在所有项中并且可以消除.经过一些重新排列,我们得到了动量方程的微分形式,

以类似的方式,我们生成y和z动量方程的微分形式,

和

最后,我们将等式9-43到9-45合并为一个向量方程,

该方程与柯西方程(方程9-37)相同;因此,我们确认我们使用微分流体元素的推导与使用散度定理的推导产生相同的结果.请注意,乘积是二阶张量(图 9-35).

**柯西方程的另一种形式**

将乘积规则应用于等式9-37左侧的第一项,我们得到

方程9-37的第二项写为,

因此我们消除了由表示的二阶张量.经过一些重新排列,将方程9-46和9-47代入方程9-37产生

但是,对于连续性方程,方程9-5,该方程中方括号中的表达式完全为零.通过组合左侧的其余两项,我们写

我们已经将方括号中的表达式识别为材料加速度——流体粒子的加速度(见第4章).

**使用牛顿第二定律推导**

我们用第三种方法推导出柯西方程.即,我们将微分流体元素作为物质元素而不是控制体积.换句话说,我们将微分元素内的流体视为一个具有固定特性的微小系统，随着流动而移动(图9-36).根据物质加速度的定义,该流体元素的加速度为.根据牛顿第二定律应用于流体的物质元素,

在图9-36所示的时刻,微分流体单元上的净力的计算方式与之前在微分控制体积上计算的相同.因此,作用在流体单元上的总力是方程9-41和9-42的总和,扩展为矢量形式.将这些代入方程9-49并除以,我们再次生成柯西方程的替代形式,

公式9-50与公式9-48相同.事后看来,我们可以从一开始就从牛顿第二定律开始,避免一些代数.尽管如此,通过三种方法推导柯西方程肯定会增强我们对方程有效性的信心!

扩展方程9-50的最后一项时,我们必须非常小心,即二阶张量的散度.在笛卡尔坐标系中,柯西方程的三个分量是

我们在本节结束时指出,我们不能单独使用柯西方程解决任何流体力学问题(即使与连续性相结合).问题是应力张量需要用问题中的主要未知数表示,即密度,压力和速度.这是针对第9-5节中最常见的流体类型完成的.

**9-5 纳维-斯托克斯方程** 2021年7月31日20点56分

**介绍**

柯西方程(方程9-37或其替代形式方程9-48)对我们来说不是很有用,因为应力张量包含九个分量,其中六个是独立的(因为对称).因此,除了密度和三个速度分量之外,还有六个额外的未知数,总共10个未知数.(在笛卡尔坐标系中,未知数是和.)同时,到目前为止,我们只讨论了四个方程——连续性(一个方程)和柯西方程(三个方程).当然,要在数学上可解,方程的数量必须等于未知数的数量,因此我们还需要六个方程.这些方程称为**本构[constitutive]**方程,它们使我们能够根据速度场和压力场来写出应力张量的分量.

我们要做的第一件事是分离压力应力和粘性应力.当流体处于静止状态时,作用在任何流体单元的任何表面上的唯一应力是压力P,它总是向内作用并垂直于表面(图9-37).因此,无论坐标轴的方向如何,对于静止的流体,应力张量减小为

方程9-52中的压力P与我们在热力学研究中熟悉的热力学压力相同.P通过某种状态方程(例如,理想气体定律)与温度和密度相关.作为旁注,这进一步使可压缩流体流动分析复杂化,因为我们引入了另一个未知数,即温度T.这个新的未知数需要另一个方程——能量方程的微分形式——本文未讨论.

当流体运动时,压力仍然向内正常作用,但也可能存在粘性应力.我们将方程9-52概括为移动流体

我们在这里引入了一个新的张量,称为**粘性应力张量**或**偏[deviatoric]应力张量**.在数学上,我们没有帮助这种情况,因为我们用的六个未知分量替换了的六个未知分量,并添加了另一个未知的压力P.然而,幸运的是,存在用速度场表示的本构方程场和可测量的流体特性,例如粘度.本构关系的实际形式取决于流体的类型,正如稍后讨论的那样.

作为旁注,公式9-53中的压力有一些微妙之处.如果流体是不可压缩的,我们就没有状态方程(它被方程𝜌=常数代替),我们就不能再定义P为热力学压力.相反,我们将公式9-53中的P定义为**机械压力**

我们从公式9-54中可以看出,机械压力是**向内作用在流体单元上的平均法向应力**.因此,一些作者也将其称为**平均压力**.因此,当处理不可压缩的流体流动时,压力变量P总是被解释为机械压力.然而,对于可压缩流场,方程9-53中的压力P是热力学压力,但在流体元件表面上感受到的平均法向应力不一定与P(压力变量P和机械压力不一定等价)相同.您可以参考Panton(1996) 或 Kundu 等人(2011) 更详细地讨论机械压力.

**牛顿流体与非牛顿流体**

流动流体变形的研究称为**流变学[rheology]**;各种流体的流变行为如图9-38所示.在本文中,我们专注于**牛顿流体,**其定义为**应力张量与应变率张量成线性比例的流体**.牛顿流体(应力与应变率成正比)类似于弹性固体(胡克定律:应力与应变成正比).许多常见的流体,如空气和其他气体,水,煤油,汽油和其他油基液体,都是牛顿流体.应力张量与应变率张量不是线性相关的流体称为**非牛顿流体**.例子包括浆液和胶体悬浮液,聚合物溶液,血液,糊状物和蛋糕糊.一些非牛顿流体表现出“记忆”——剪切应力不仅取决于局部应变率,还取决于其历史.释放所施加的应力后(部分)恢复到其原始形状的流体称为**粘弹性流体[viscoelastic]**.

一些非牛顿流体被称为**剪切稀化[thinning]流体**或**假塑性[pseudoplastic]流体**,因为流体被剪切得越多,它的粘性就越小.一个很好的例子是油漆.从罐中倒出或用画笔拾起时,油漆非常粘稠,因为剪切速率很小.然而,当我们将油漆涂在墙上时,画笔和墙壁之间的油漆薄层会受到很大的剪切率,并且变得不那么粘稠了.**塑性[plastic]流体**是那些剪切稀化效应极端的流体.在某些流体中,在流体开始流动之前需要一个称为**屈服[yield]应力**的有限应力;这种流体称为**宾汉塑性流体**.某些糊状物如粉刺霜和牙膏是宾汉塑料流体的例子.如果将管子倒置,即使由于重力存在非零应力,糊状物也不会流动.然而,如果你挤压管子(极大地增加了压力),糊状物会像一种非常粘稠的流体一样流动.其他流体表现出相反的效果,称为剪切增稠流体或膨胀流体;流体被剪切得越多,它就变得越粘稠.最好的例子是流沙,沙子和水的浓稠混合物.众所周知,在好莱坞电影中,流沙很容易在流沙中缓慢移动,因为粘性低;但是如果你惊慌失措并试图快速移动,粘性阻力会大大增加,你就会“卡住”(图9-39).您可以通过将两份玉米淀粉和一份水混合来制作自己的流沙——试试看!一些运动器材中使用了剪切增稠液——你拉得越快,你遇到的阻力就越大.

**不可压缩等温流的纳维-斯托克斯方程的推导**

从这一点开始,我们将讨论限制在牛顿流体上,根据定义,应力张量与应变率张量成线性比例.一般结果(对于可压缩流)相当复杂,这里不包括在内.相反,我们假设不可压缩流(𝜌=常数).我们还假设几乎等温流——即,局部温度变化很小或不存在;这消除了对微分能量方程的需要.后一个假设的进一步结果是流体特性,例如动态粘度𝜇和运动粘度𝜈,也是恒定的(图9-40).有了这些假设,可以证明(Kundu et al.,2011)粘性应力张量减少到

其中是第4章中定义的应变率张量.方程9-55表明应力与应变成线性比例.在笛卡尔坐标中,列出了粘性应力张量的九个分量,由于对称性,其中只有六个是独立的:

在笛卡尔坐标系中,方程9-53的应力张量因此变为

现在我们将方程9-57代入柯西方程的三个笛卡尔分量.让我们首先考虑x分量.公式9-51a变为

请注意,由于压力仅由法向应力组成,因此它仅对公式9-58贡献一项.然而,由于粘性应力张量由法向应力和剪应力组成,因此它贡献了三个项.(顺便说一下,这是采用二阶张量发散的直接结果.)

我们注意到,只要速度分量是和的平滑函数,微分的阶就无关紧要.例如,公式9-58中最后一项的第一部分可以改写为

在对公式9-58中的粘性项进行一些巧妙的重新排列后,

由于不可压缩流的连续性方程(方程9-17),括号中的项为零.我们还将最后三项识别为笛卡尔坐标中速度分量的拉普拉斯算子(图9-41).因此,我们将动量方程的x分量写为

类似地,动量方程的y和z分量分别简化为

和,

最后,我们将三个分量合并为一个向量方程;结果是具有恒定粘度的不可压缩流动的**Navier-Stokes**方程.

尽管我们在笛卡尔坐标系中导出了方程9-60的分量,但方程9-60的矢量形式在任何正交坐标系中都是有效的.这个著名的方程是为了纪念法国工程师Louis Marie Henri Navier(1785-1836 年)和英国数学家George Gabriel Stokes 爵士(1819-1903年)而命名的,他们都开发了粘性项,但彼此独立.

Navier-Stokes方程是流体力学的基石(图9-42).它可能看起来无害,但它是一个不稳定的,非线性的,二阶偏微分方程.如果我们能够为任何几何形状的流动解出这个方程,这本书的厚度大约是这本书的一半.不幸的是,除了非常简单的流场之外,无法获得解析解.可以说本书的其余部分都致力于解决方程9-60,这与事实相去甚远!事实上,许多研究人员的整个职业生涯都在试图解决Navier-Stokes方程.

方程9-60有四个未知数(三个速度分量和压力),但它只表示三个方程(三个分量,因为它是矢量方程).显然,我们需要另一个方程来使问题可解.第四个方程是不可压缩的连续性方程(方程9-16).在我们尝试求解这组微分方程之前,我们需要选择一个坐标系并在该坐标系中展开方程.

**笛卡尔坐标中的连续性和Navier-Stokes方程**

连续性方程(方程9-16)和纳维-斯托克斯方程(方程 9-60)在笛卡尔坐标和中展开:

圆柱坐标中的连续性和 Navier-Stokes 方程

连续性方程（方程 9-16）和 Navier-Stokes 方程（方程 9-60）在柱坐标 (r, 𝜃,z) 和 (ur, u𝜃, uz) 中展开：

方程 9-62b 和 9-62c 中的前两个粘性项可以处理成不同的形式，这在求解这些方程时通常更有用（图 9-43）。 推导留作练习。 Navier-Stokes 方程（方程 9-62b 和 9-62c）的 r 和 𝜃 分量两侧的“额外”项是由于圆柱坐标的特殊性质而出现的。 也就是说，当我们向𝜃方向移动时，单位向量也会改变方向； 因此 r- 和 𝜃- 分量是耦合的（图 9-44）。 （这种耦合效应在笛卡尔坐标中不存在，因此方程 9-61 中没有“额外”项。）为了完整起见，此处以圆柱坐标列出了粘性应力张量的六个独立分量，

**9-6 流体流动问题的微分分析** 2021年7月31日21点46分

在本节中,我们将展示如何在笛卡尔坐标系和圆柱坐标系中应用运动的微分方程.有两种类型的问题可以使用微分方程(连续性和纳维-斯托克斯):

* 计算已知速度场的压力场
* 计算已知几何形状和已知边界条件的流动的速度和压力场

为简单起见,我们只考虑不可压缩的流动,消除了将𝜌作为变量的计算.此外,第9-5节中导出的 Navier-Stokes方程的形式仅适用于具有恒定属性(粘度,热导率等)的牛顿流体.最后,我们假设温度变化可以忽略不计,因此T不是变量.我们剩下四个变量或未知数(压力加上三个速度分量),我们有四个微分方程(图9-45).

**计算已知速度场的压力场**

第一组例子涉及对已知速度场的压力场的计算.由于连续方程中没有出现压力,们理论上可以产生一个完全基于质量守恒的速度场.然而,由于速度同时出现在连续方程Navier-Stoke方程中,这两个方程是耦合的.此外,压力出现在Navier-Stokes方程的所有三个分量中,因此速度场和压力场也是耦合的.这种速度和压力之间的紧密耦合使我们能够计算已知速度场的压力场.

注意,例9-13中压强的最后一个方程(方程8)包含一个任意常数.这说明了不可压缩流体中压力场的一个重要问题;也就是说,

不可压缩流中的速度场不受压力绝对大小的影响,而仅受压力差的影响.

如果我们看看Navier-Stokes方程,就不会感到惊讶,在这个方程中,P只是一个梯度,而不是单独出现.另一种解释这种说法的方法是,压力的绝对值并不重要,重要的只是压力差(图9-47).该陈述的一个直接结果是,我们可以在一个任意常数内计算压力场,但为了确定这个常数(例9-13中的),我们必须测量(或获得)流场某处的P.换句话说,我们需要一个压力边界条件.

我们用**计算流体动力学(CFD)**生成的一个例子来说明这一点,其中连续性和Navier-Stokes方程的数值求解(第15章).考虑空气通过一个有非对称阻塞的通道向下流动(图9-48).(注意,计算流域的上游和下游扩展得比图9-48中所示的要远得多.)我们计算了两种除了压力条件外完全相同的情况.在情况1中,我们将表压设置在堵塞下游很远的地方为零.在情况2中,我们在相同的位置设置压力为500pa表压.两种情况下,视场顶部中心和视场底部中心的测量压力如图9-48所示,这是由两个CFD解决方案生成的.你可以看到,情况2的压力场和情况1是一样的,除了各处的压力都增加了500 Pa.图9-48中还显示了每种情况下的速度矢量图和流线图.结果是相同的,证实了我们的陈述,即速度场不受压力的绝对大小的影响,而只受压力差的影响.从上面的压力减去下面的压力,我们可以看到,对于两种情况.

关于压力差的说法对于可压缩流场是不正确的,在可压缩流场中,P是热力学压力而不是机械压力.在这种情况下,P通过状态方程与密度和温度耦合,压强的绝对值很重要.可压缩流体解不仅需要质量方程和动量方程,还需要能量方程和状态方程.

我们借此机会进一步评论图9-48所示的CFD结果.通过研究相对简单的流动,你可以学到很多关于流体流动的物理知识.请注意,大部分的压降发生在通道的喉部,在那里流体快速加速.下游还存在流动分离堵塞;快速流动的空气不能在急转弯时转弯,当气流离开开口时就会与壁面分离.流线表明在淤塞下游的河道两侧有很大的回流区域.这些循环区域的压力很低.速度矢量显示出一个相反的钟形速度剖面,出口的开口-很像排气射流.由于几何形状的非对称性质,射流向右转,流重新附着在右壁上比附着在左壁上快得多.如你所料,在射流撞击右侧壁面的区域,压力有所增加.最后,请注意,当空气加速挤压通过孔板时,流线会聚(如第9-3节所讨论的).当气流从下游吹出时,流线会有所发散.还要注意,回流区的流线距离非常远,这表明那里的速度相对较小;速度矢量图证实了这一点.

最后,我们注意到,大多数CFD程序并不像例9-13中那样,通过积分Navier-Stokes方程来计算压力.相反,使用了某种**压力校正算法**.大多数常用的算法都是将连续性方程和Navier-Stokes方程结合起来,使压强出现在连续性方程中.最流行的压力校正算法会产生一种**泊松方程**形式,即压力从一个迭代(n)到下一个迭代(n+1),

然后,当计算机向一个解迭代时,用修正的连续性方程从迭代(n)的值“修正”迭代(n+1的压力场,

与压力校正算法的发展相关的细节超出了本文本的范围.Gerhart、Gross和Hochstein(1992)提出了一个二维流动的例子.

**连续性和Navier-Stokes方程的精确解**

本节剩下的例子问题是由不可压缩连续性和Navier-Stokes方程组成的微分方程组的精确解.正如您将看到的,这些问题必然是简单的,因此它们是可以解决的.它们大都假定无限边界和充分发展的条件,使Navier-Stokes方程左侧的平流项消失.此外,它们是层流,二维的,或者是稳定的,或者是以预先确定的方式依赖于时间的.解决这些问题的基本步骤有6个，如图9-52所示.步骤2是特别关键的,因为边界条件决定了解的唯一性.第4步在分析上是不可能的,除非是简单的问题.在步骤5中,必须有足够的边界条件来解步骤4中生成的所有积分常数.第6步是验证所有的微分方程和边界条件是满足的.我们建议您遵循这些步骤,即使在一些步骤似乎微不足道的情况下,以便了解过程.

虽然这里显示的例子很简单,但它们充分说明了用于求解这些微分方程的过程.在第15章中,我们将讨论计算机如何使我们能够使用计算流体动力学(CFD)对更为复杂的流动进行数值求解Navier-Stokes方程.你会看到这里使用了相同的步骤——几何的规范,边界条件的应用,微分方程的积分,等等,尽管这些步骤并不总是按照相同的顺序进行.

**边界条件**

由于边界条件对正确的解是如此关键,我们讨论流体流动分析中经常遇到的边界条件的类型.最常用的边界条件是**无滑移条件**,即流体与固体壁面接触时,流体的速度必须等于壁面的速度,

换句话说,正如它的名字所暗示的,流体和墙壁之间没有“滑移”.靠近壁面的流体颗粒粘附在壁面上,并以与壁面相同的速度运动.方程9-65有一个特例,对于的固定壁面;靠近静止壁面的流体速度为零.对于还考虑温度效应的情况,流体的温度必须等于壁面的温度,即.你必须根据你选择的参照系小心地分配不滑动的条件.例如,考虑活塞和汽缸壁之间的油薄膜(图9-53).在静止参照系中,与圆柱相邻的流体是静止的,而与运动活塞相邻的流体的速度为.然而,在与活塞一起运动的参照系中,与活塞相邻的流体的速度为零.但与圆柱体相邻的流体的速度为.无滑移条件的例外情况出现在稀薄气体流中,例如在宇宙飞船再入或在研究极小(亚微米)粒子的运动时.在这样的流动中,空气实际上可以沿着墙壁滑动,但这些流动超出了本文本的范围.

当两种流体(流体A和流体B)在界面处相遇时,界面边界条件为

除了两种流体的速度必须相等的条件外,作用在界面附近平行于界面方向的流体颗粒上的剪应力也必须在两种流体之间匹配(图9-54).注意,在图中,画在流体中的流体颗粒的顶部,画在流体B中的流体颗粒的底部,我们仔细考虑了剪切应力的方向.由于剪切应力的符号约定,图9-54中箭头的方向是相反的(牛顿第三定律的结果).我们注意到,虽然速度在界面上是连续的,但它的斜率不是.此外,考虑温度效应,界面处的,但界面处的温度斜率也可能存在不连续.

那么界面上的压力呢?如果表面张力影响可以忽略,或者如果界面几乎是平的,.然而,如果界面是急剧弯曲的,就像毛细管中液体上升的半月板一样,界面一侧的压力可能与另一侧的压力有很大的不同.你应该记得在第二章中,由于表面张力的影响,压力的跳跃与界面的曲率半径成反比.

界面边界条件的简并形式发生在液体的自由表面,这意味着流体A是液体,流体B是气体(通常是空气).我们在图9-55中举例说明一个简单的例子,流体A是液态水,流体B是空气.界面是平坦的,表面张力的影响可以忽略不计,但水是水平移动的(就像水在平静的河流中流动).在这种情况下,水面上的空气和水的速度必须匹配,作用在水面上一个水粒子上的剪应力必须等于作用在水面上一个空气粒子上的剪应力.根据公式9-66,

快速浏览一下流体性质表就会发现比大50多倍.为了使剪切应力相等,方程9-67要求的斜率大于的50倍.因此,将作用于水面的剪应力近似为与水中其他地方的剪应力相比可以忽略不计的小是合理的.另一种说法是,移动的水在空气中几乎没有阻力地拖拽空气;相比之下,空气不会显著降低水的速度.综上所述,对于液体与气体接触的情况,在表面张力影响可以忽略不计的情况下,自由表面边界条件为

根据问题的设置,会出现其他边界条件.例如,我们经常需要在流体进入流域的边界上定义入口边界条件.同样地,我们在流出处定义出-出边界条件.对称边界条件沿对称轴或对称平面是有用的.例如,沿对称水平面的对称边界条件如图9-56所示.对于非定常流问题,我们还需要定义初始条件(在开始时间,通常t=0).

在例9-15到例9-19中,我们在适当的地方应用方程9-65到9-68中的边界条件.这些和其他边界条件将在第15章中进行更详细的讨论,并将它们应用到CFD解决方案中.

你可能会质疑例9-15的最终结果的有用性.毕竟,我们什么时候会遇到两个无限平行的板块,哪一个在移动?实际上,有几个实际的流库埃特流解是一个很好的近似.其中一种流动发生在旋转粘度计(图9-62)内,这是一种用于测量粘度的仪器.它由两个长度为l的同心圆圆柱体(半径为的实心旋转内圆柱体和半径为的空心静止外圆柱体)组成.(L代入图9-62页面;z轴在页面外.)两个圆柱体之间的间隙非常小,其中含有要测量其粘度的流体.图9-62中的放大区域与图9-57中的几乎相同,因为两者之间的差距很小,即.在粘度测量中,要测量内圆柱体的角速度𝜔,以及旋转圆柱体所需的施加扭矩.由例9-15可知,作用于内圆柱体附近流体单元的粘性剪切应力近似等于,

其中,将图9-57中移动上板的速度替换为内筒转动壁的逆时针速度.在图9-62底部放大区域中,𝜏在邻近筒体内壁的流体元件上向右移动;因此,作用在这个位置的内圆柱体上的单位面积力向左作用,其大小如式9-69所示.由于流体粘度作用在圆柱体内壁上的总顺时针力矩等于剪应力乘以壁面面积乘以力臂,

在稳定条件下,顺时针扭矩t黏性与所施加的逆时针扭矩相平衡.将这些方程相等,并解9-70式求得流体粘度得到

类似的分析也可以在无载荷轴颈轴承上进行,其中粘性油在内转轴和固定外壳之间的小间隙中流动.(当轴承加载时,内缸和外缸不再同心,需要进行更复杂的分析.)

例9-15到例9-17在笛卡尔坐标系中的求解过程也可以在任何其他坐标系中使用.在例9-18中,我们提出了一个经典的圆管内完全展开流动问题,我们使用柱坐标.

到目前为止,我们所有的Navier-Stokes解都是针对稳定流动的.你们可以想象,如果流体是不稳定的,并且Navier-Stokes方程的时间导数项没有消失,解会变得多么复杂.尽管如此,仍有一些非定常流问题是可以用解析方法解决的.我们在例9-19中展示了其中的一个.

**生物流体力学流程差异分析\***

在例9-18中,我们导出了圆管中完全发展的流动,或通常称为泊肃叶流动.这个特殊例子的Navier-Stokes方程的解是非常直接的,但它是基于一些假设和近似的.例如,这些近似适用于大多数水系统的标准管道流量.然而,当应用于人体血液流动时,必须密切监测和评估其适用性.传统上作为一阶尝试,心血管流体动力学家使用泊肃叶流推导来理解动脉中的血流.这可以为工程师提供速度和流速的一阶近似,但如果工程师对更复杂的,坦率地说,现实的血液流动理解感兴趣,那么检查用于达到泊肃叶流的主要近似是很重要的.

在深入研究之前,让我们先大致了解一下液体或血液的基本情况.流体将保持不可压缩,流动将继续是层流,重力仍然可以忽略不计.完全发展的血流近似也将保留,尽管在现实中这并不适用于心血管系统.仅基于这些近似,这就留下了稳定,平行,轴对称牛顿流的其他主要近似,以及近似为刚性圆管的管道.

回想一下,一个健康的成年人在休息时,心脏以平均每分钟75次的速度连续泵血.作为模拟循环系统中心室收缩产生的流量波形的一个例子(图9-82),在这个800ms周期中,流量会暂时改变.因此,从根本上来说,为了模拟流经动脉的血液流动,稳态流动近似是不合适的,这使得将血液流动建模为泊肃叶流动不适合仅用这一近似.在短时间内(~300ms)有快速的流量加速和减速.然而,从心脏开始的波传播随着距离的增加而减小,随着动脉逐渐缩小到毛细血管水平,搏动的幅度减小.当专注于静脉端血液回到心脏,稳定流动近似可以应用更多的信心,但应该注意的是,还有流中断,特别是从下肢静脉瓣膜(类似于心脏瓣膜)帮助血液回到心脏.

刚性圆管近似法同样不适用于心血管血流。正如第八章所提到的，血管从主血管(主动脉)逐渐变细到更小的血管(动脉、小动脉和毛细血管)。在商业管道网络中，直径没有可能看到的突然变化。因此，一个几何考虑的事实是，一段血管从一端到另一端将有一个连续的直径变化。对于圆形管的横截面，血管不是完全圆形的，而是椭圆形的，所以有长轴和短轴。这里适用于泊肃叶流的最重要的近似是，管道通常被认为是刚性的。然而，健康的血管并不坚硬;这些结构是顺应和灵活的。例如，从左心室发出的主动脉直径可以增加一倍，以适应在短时间内左心室射血时血容量的急剧增加。使用这种近似的一个主要例外是在研究病理状态时，如动脉粥样硬化或研究老年人的血液流动。两者的基本结果都是血管会变硬。在此过程中，可以应用刚度近似。随着血管硬化，血液的脉动性加快，这也会对这些特定患者群体的小动脉中稳定的近似流动产生影响。对于平行流和轴对称流，这两种方法都可以通过聚焦于心血管系统的一个位置而被视为不适当地近似应用于血流。考虑到图9-83中的主动脉(从左心室、主动脉弓上升，从主动脉弓下降)，其几何形状有显著变化，影响流场。在心血管系统的二维图像中(如图8-83)通常没有显示的事实是，主动脉并不像通常描述的那样停留在一个平面上。实际上，主动脉(就像一个人看着另一个人一样)将从左心室开始，并移动到脊柱(人的背部)，将血流移动到其他平面，这是纯粹的解剖学原因。这个几何学的作用是在这个区域创造Dean flow。因此，围绕这个弯曲和向后移动而产生的流动是一个双螺旋旋转模式(想想DNA的螺旋，但螺旋是流线)。由于所有这些旋流，平行流和轴对称流的近似是不恰当的。这是在人体内流动的最极端的情况(除了病理或有医疗设备干预的情况)。平行和轴对称流动近似可以更可靠地用于循环系统的其余部分。